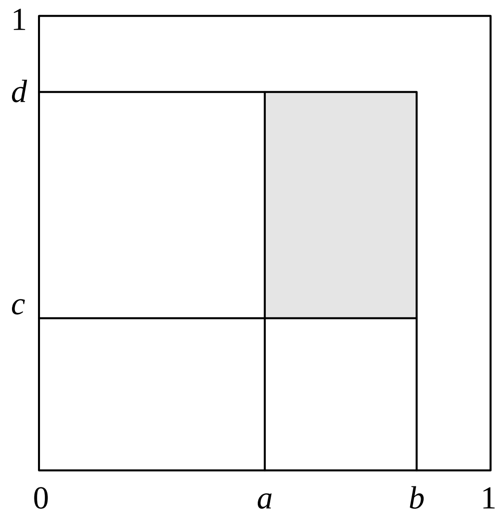
Loi de X + Y lorsque X et Y sont des v.a. indépendantes de loi U [0 ; 1]

X et Y sont des variables indépendantes et suivent des lois uniformes sur [0 ; 1]. Si a, b, c et d sont des réels tels que $0 \le a \le b \le 1$ et $0 \le c \le d \le 1$ alors :

$P(\{a \le X \le b\} \cap \{c \le Y \le d\}) = (b - a)(d - c)$, ce qui est représenté par l'aire du rectangle gris de la figure suivante.



Ainsi la loi de X + Y prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 2] et sa densité peut être déterminée à partir de la probabilité de $\{X + Y \le a\}$.

En effet :

• Si $0 \le a \le 1$ alors :

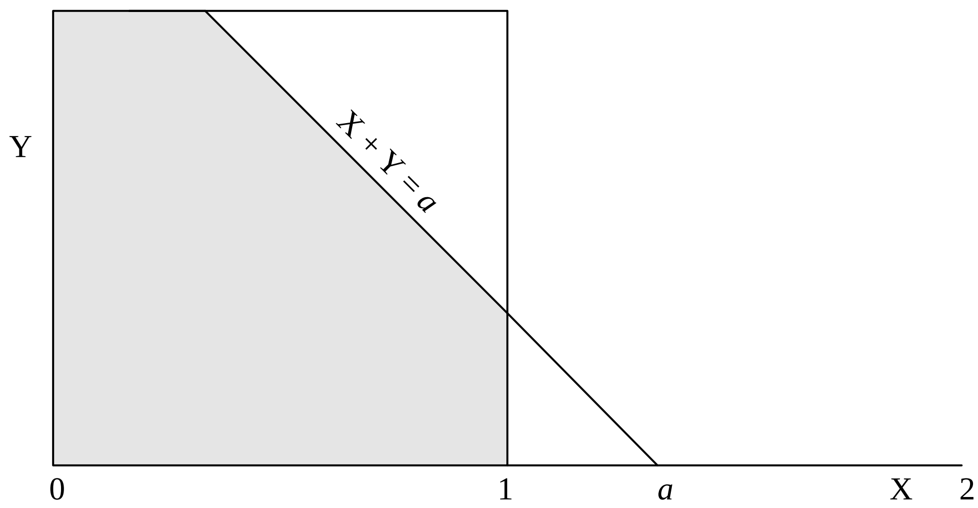
$P(\{X + Y \le a\}) = \frac{1}{2} a^2$, ce qui s'écrit encore :

$$P(\{X + Y \le a\}) = \int_0^a x \, \mathrm{d}x .$$

• Si $1 < a \le 2$ alors :

$P(\{X + Y \le a\}) = 1 - \frac{1}{2}(2 - a)^2$, ce qui s'écrit encore :

$$P(\{X + Y \le a\}) = \frac{1}{2} + \int_1^a (2 - x) \, \mathrm{d}x .$$



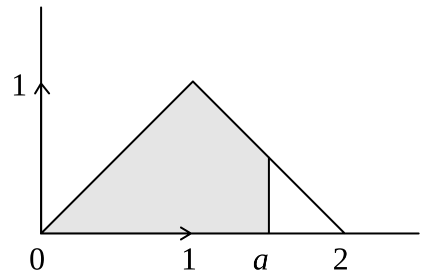
Dans les deux cas :

$P(\{X + Y \le a\}) = \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x$ à condition de définir f par :

$f(x) = 0$ si $x < 0$ ou $x > 2$,
$f(x) = x$ si $0 \le x \le 1$ et
$f(x) = 2 - x$ si $1 \le x \le 2$.

f est encore appelée densité de la loi de X + Y et pour tous a, b tels que : $0 \le a \le b \le 2$,

$$P(\{a \le X + Y \le b\}) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x .$$



Voir aussi l'animation