PRINCIPES DE LA SYMÉTRIE PERTURBÉE

Michel MENDES FRANCE

LA SYMÉTRIE ET SES PERTURBATIONS

J'ai toujours été impressionné par le tableau amusé que dépeint Pol KRANF du Monsieur qui n'a pas d'habitudes :

> *"Il déposa symétriquement son couteau et sa fourchette, plaça son assiette et son verre dans l'axe des boutons de son gilet, s'assura que la bouteille et la carafe étaient à égale distance du moutardier ..."*

Depuis la lecture de ce court passage, j'ai acquis une sorte de méfiance, voire d'horreur de la symétrie. Je me propose de montrer ici qu'en perturbant légèrement la symétrie, on obtient des structures riches en potentialité.

Tout d'abord, quelques définitions. Les mathématiciens appellent "*mot*" toute suite finie de lettres. Un mot M n'est donc pas nécessairement signifiant, comme par exemple

$$aax \ , \ tfcfgg.$$

Un mot est lu naturellement de gauche à droite et si on veut insister sur le sens de lecture, on pourra adopter une notation fléchée. Si M désigne le mot aax, on écrira indifféremment

$$M = aax \quad ou \quad \overrightarrow{M} = aax,$$

mais aussi

$$\overleftarrow{M} = xaa.$$

M et $\overrightarrow{M}$ représentent donc le même mot alors que $\overleftarrow{M}$ désigne le mot lu à l'envers. Un mot tel que $\overrightarrow{M} = \overleftarrow{M}$ s'appelle un palindrome ("*été*"; "*tu l'as trop écrasé, César, ce port salut*").

L'opérateur de symétrisation S que nous définissons maintenant agit comme un miroir sur un mot $\overrightarrow{M}$:

$$S(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overleftarrow{M}.$$

$S(\overrightarrow{M})$ est donc un mot deux fois plus long que $\overrightarrow{M}$ et est obtenu en juxtaposant $\overrightarrow{M}$ et son opposé $\overleftarrow{M}$. Ainsi

$$S(aax) = aaxxaa.$$

© L'OUVERT **49** (1987)

On peut appliquer l'opérateur S deux fois consécutivement

$$S(S(\overrightarrow{M})) = S(\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}.$$

En abrégé on écrit $S^2(\overleftarrow{M})$. Une troisième application donne

$$S^3(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}$$

et une infinité d'applications conduit à une suite infinie périodique

$$S^\infty(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\ldots$$

Répétition oppressante de l'ordre préétabli. C'est le NO FUTURE des punks qui fait écho aux paroles désabusées de QOHÈLÈT :

> "Ce qui a été sera
> Ce qui s'est fait, se fera
> Rien du tout de neuf sous le soleil."

Pour casser la symétrie et rompre l'obsédante répétition, il suffit de "*perturber*" l'opérateur S. On se donne un mot $P = \overrightarrow{P}$ fixé une fois pour toute et on considère l'opérateur S_p qui transforme $\overrightarrow{M}$ en

$$S_p(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overrightarrow{P}\overleftarrow{M}.$$

P s'appelle la perturbation. Appliquez S_p deux fois

$$S_p^2(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overrightarrow{P}\overleftarrow{M}\overrightarrow{P}\overrightarrow{M}\overleftarrow{P}\overleftarrow{M}$$

puis une infinité de fois

$$S_p^\infty(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overrightarrow{P}\overleftarrow{M}\overrightarrow{P}\overrightarrow{M}\overleftarrow{P}\overleftarrow{M}\overrightarrow{P}\overrightarrow{M}\overrightarrow{P}\overleftarrow{M}\ldots$$

Les symboles M et P alternent régulièrement, mais observez la suite des flèches. Elles suivent une loi plus complexe. La structure semble absente. Le reste de l'article est consacré à l'étude de cette suite.

PAPIERS PLIÉS

Plier du papier est l'activité traditionnelle du fonctionnaire qui, selon une croyance bien ancrée, passe son temps à confectionner des cocottes. C'est aussi un art très développé au Japon sous le nom d'origami, et qui se répand en France sous l'impulsion du mouvement français des plieurs de papiers – M.F.P.P. – (voir figure 1).

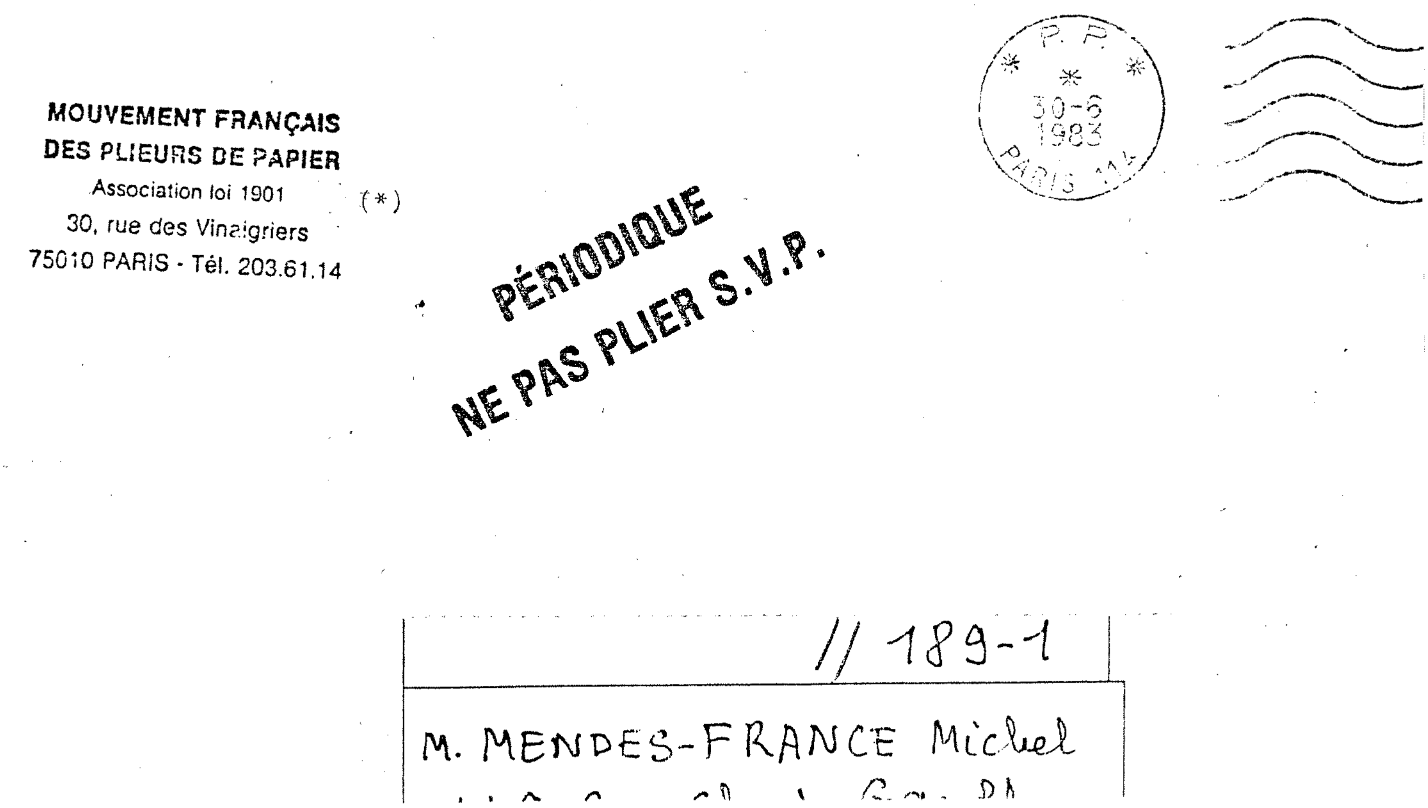


Figure 1

(*) L'adresse actuelle du Mouvement Français des Plieurs de Papiers est : 56 rue Coriolis 75012 Paris.

Notre propos est autre. Nous voulons illustrer un aspect mathématique moins bien connu et qui pourtant ne manque pas de charme.

Pliez une feuille de papier en deux en rabattant la moitié droite sur la moitié gauche comme on l'a indiqué sur la figure 2 où seule est représentée la tranche de la feuille.

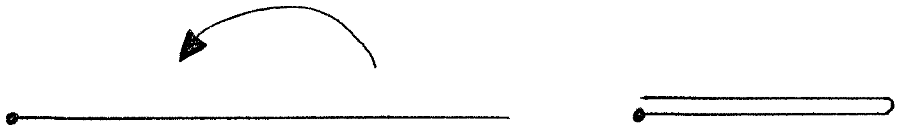


Figure 2

Répétez l'opération une seconde fois (figure 3) et maintenant dépliez la feuille à angle droit. Vous obtenez alors une ligne brisée contenant $2^2 = 4$ côtés (figure 4).

Figure 3

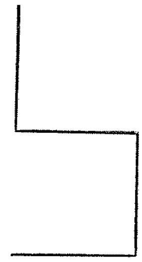


Figure 4

Revenons à la situation de la figure 3 et repliez la feuille une 3ᵉ fois sur elle-même (figure 5). Par dépliage à angle droit,

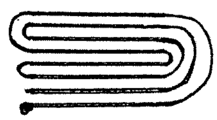


Figure 5

on obtient maintenant une ligne brisée constituée de $2^3 = 8$ côtés, chaque côté mesurant la moitié de ceux obtenus à la seconde étape. En multipliant toutes les longueurs par 2, on aboutit à la figure 6.

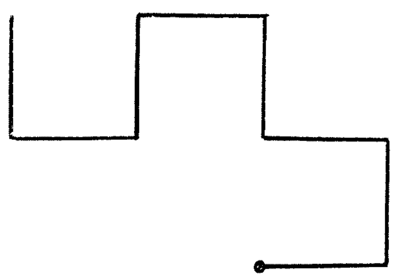


Figure 6

Imaginons un mobile qui décrit la ligne brisée de la figure 6. Partant du point O, on le voit tourner successivement deux fois à gauche, une fois à droite, deux fois à gauche, puis enfin deux fois à droite. Son parcours peut donc être symbolisé (codé) par la suite finie

$$ggdggdd$$

(g = gauche; d = droite). Remplaçez la lettre g par la flèche $\rightarrow$ et la lettre d par la flèche $\leftarrow$. Vous obtenez la suite

$$\rightarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow$$

qui coïncide avec la suite des flèches du mot $S_p^2(\overrightarrow{M})$ du premier paragraphe.

Une fois convaincu de ce fait et de son extension, nous pouvons replier la feuille de papier quatre fois sur elle-même, cinq fois, ...et pourquoi pas, une infinité de fois. Même si physiquement cela est impossible, rien ne nous empêche de faire l'opération mentalement dans un monde idéal.

Cette feuille infiniment grande, infiniment mince et infiniment repliée sur elle-même peut maintenant être dépliée à angle droit. Apparaît alors une ligne brisée infinie d'allure très complexe et dont on a représenté les 1024 premiers côtés sur la figure 7. Cette courbe, appelée courbe du dragon semble avoir été découverte par le physicien HEIGHWAY et a été étudiée par les deux mathématiciens américains Ch. DAVIS et D. KNUTH.

Imaginons un mobile qui décrirait la courbe. Il suivrait exactement les instructions fournies par la suite des flèches $S_p^\infty(\overrightarrow{M})$ à condition de remplacer "$\rightarrow$" par g et "$\leftarrow$" par d :

$$ggdggddgggd\ldots$$

Voici donc interprétée (expliquée?) la suite des flèches en termes de pliage de papier. Où est le gain pourra-t-on demander? Le gain réside en ce que nous avons maintenant une représentation visuelle de la suite des flèches qui nous permettra de voir certaines propriétés jusque là cachées.

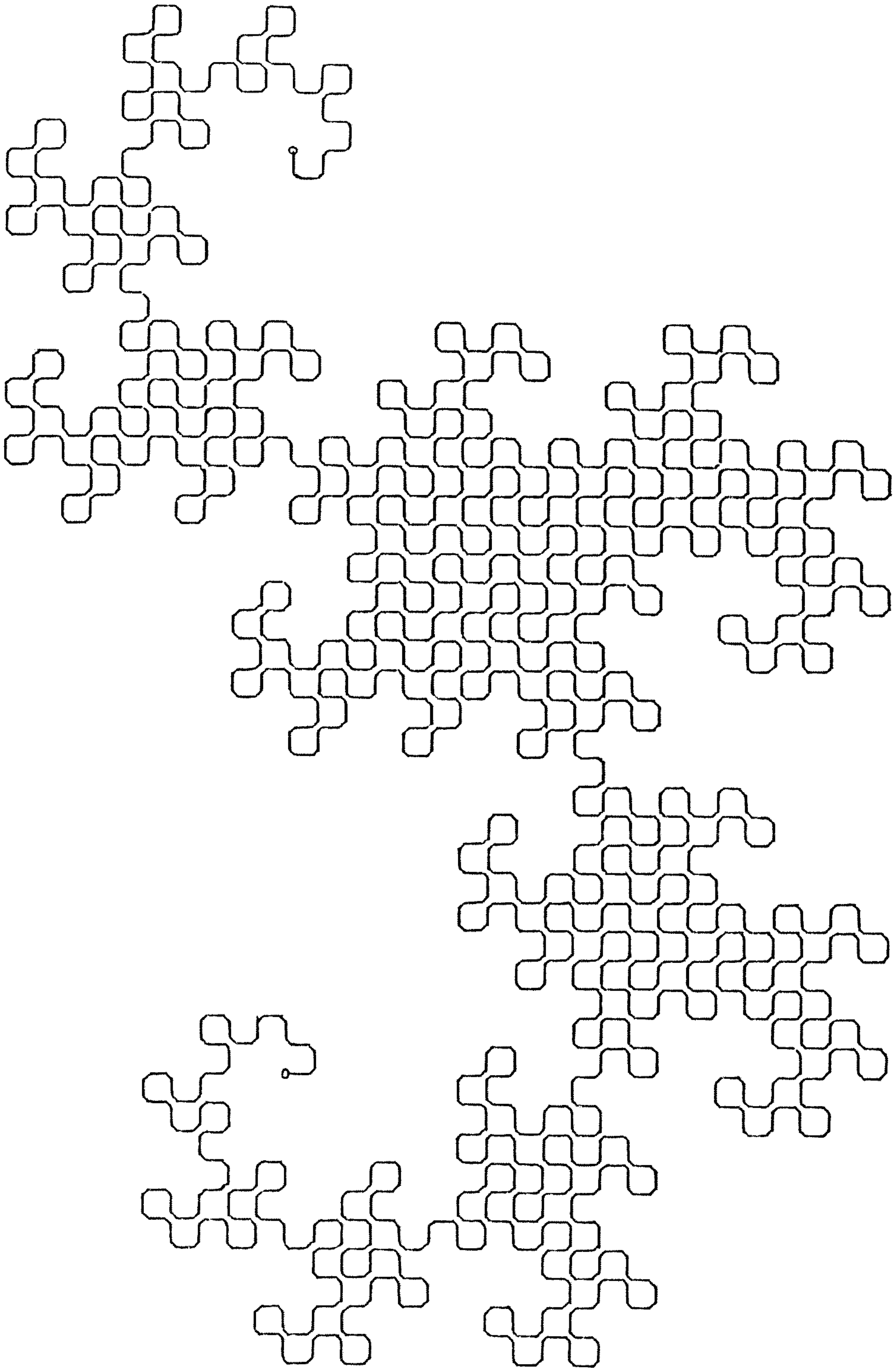


Figure 7

LES COURBES DU DRAGON

La figure 7 nous a donné un exemple de courbe du dragon. Mais il y en a d'autres dont nous étudierons globalement les propriétés. Rappelez-vous, à la toute première étape, nous avons rabattu la moitié droite de la feuille de papier **par dessus** la moitié gauche. Nous dirons que nous avons fait un pliage **positif**. Nous aurions tout aussi bien pu plier la feuille par en **dessous**, ce que nous appellerons un pliage **négatif** (figure 8).

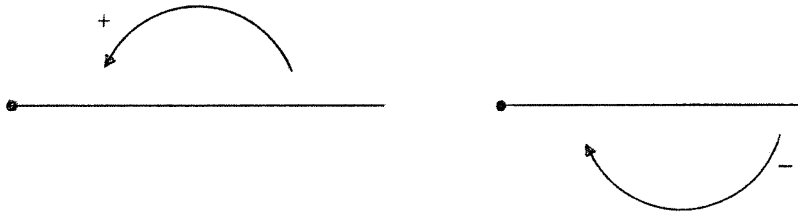


Figure 8

Maintenant à chaque étape, nous avons le choix entre pliage positif ou pliage négatif. Après 1, 2, 3, ... ou une infinité de pliages dans un sens ou dans l'autre, et par dépliage à angle droit, on aura engendré une nouvelle courbe du dragon d'allure différente. Ainsi par exemple, si vous pliez alternativement la feuille dans le sens positif puis dans le sens négatif, trois fois de suite vous aurez engendré la ligne polygonale représentée sur la figure 9, codée par la suite :

$$dggdddggdgggddg\dots$$

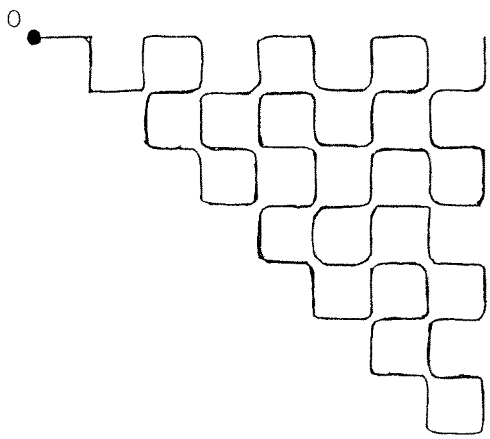


Figure 9

Faites votre choix de pliages et construisez vous-même votre propre courbe du dragon. Elles ont toutes la même propriété à savoir qu'elles sont non intersectantes. Chaque côté de la ligne brisée n'est parcouru qu'une seule fois par un mobile qui décrirait la courbe. Cette propriété est tout-à-fait remarquable et illustre bien le fait que la suite des flèches de $S_p^\infty(\overrightarrow{M})$ n'est pas du tout au hasard. Tout ceci bien entendu se démontre et ceux qui seraient intéressés par les preuves devraient consulter l'article de Ch. DAVIS et D. KNUTH [Number Representations and Dragon

Curves I, II. Journal Recreational Mathematics, vol. 3, 1970, p. 61-81 et 133-149]. Ils y trouveront entre autres une mine de courbes curieuses. On pourra aussi consulter un article plus récent auquel j'ai contribué et qui tout en étendant et précisant les résultats précédents établit un lien inattendu entre pliage et nombres transcendants [F. M. DEKKING, M. MENDES FRANCE, A.J. van der POORTEN. Folds! Mathematical Intelligencer, vol. 4, 1982, p. 130-138, 173-181, 190-195].

NOMBRES TRANSCENDANTS

On sait qu'un nombre algébrique est un nombre réel ou complexe x qui annule un polynôme à coefficients entiers $a_0, a_1, \ldots, a_d$ non tous nuls

$$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

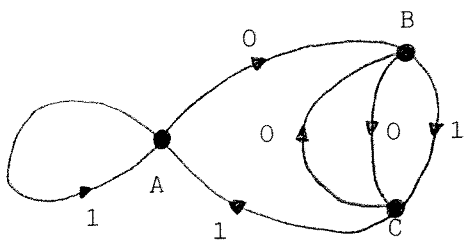
Ainsi sont algébriques les nombres entiers, les nombres rationnels, les nombres quadratiques ($\sqrt{2}$ par exemple), $i = \sqrt{-1}$, etc ... Il existe cependant des nombres non algébriques. On les appelle transcendants. Tels sont $\pi, e, \ell n(2)$,... Il est difficile de montrer qu'un nombre donné est transcendant bien que "*presque tous les nombres* " le sont (l'ensemble des nombres transcendants a la puissance du continu alors que l'ensemble des nombres algébriques n'est que dénombrable).

Considérons une courbe du dragon arbitraire. Notons la suite infinie des instructions g et d qui décrivent la courbe. En codant g par 1 et d par 0, on obtient une suite infinie de 0 et de 1, qu'on peut interpréter comme le développement binaire d'un nombre réel. Ainsi que l'ont prouvé J. LOXTON et A. van der POORTEN, ce nombre est transcendant.

Ce dernier résultat est un cas particulier d'une conjecture liée aux automates et que nous décrivons maintenant.

AUTOMATES

Nous ne décrirons ici qu'une sous-classe d'automates. Un automate est défini par la donnée d'un nombre fini d'états notés $A, B, C, \ldots$. L'un des états est l'état initial, disons A.



$A \to a$
$B \to b$
$C \to a$

Figure 10

De chaque état partent deux flèches 0 et 1 qui convergent sur 2 autres états pas nécessairement distincts de l'état d'origine. Enfin une fonction de sortie applique l'ensemble des états sur un ensemble fini $\{a, b, \ldots\}$. Dans l'exemple de la figure 10, A et C sont envoyés sur a et B sur b.

L'automate transforme tout entier $n \geq 0$ en l'un des symboles $a, b, \ldots$ de la façon suivante. Prenons par exemple le nombre "*dix neuf*" qu'on écrit en base 2 : 10011. Partant de l'état initial, on suit les instructions 1,0,0,1,1 qui envoient successivement l'automate de l'état A aux états A, B, C, A, A. L'état final étant A, on lit a. Ainsi l'automate envoie "*dix neuf*" sur a. Plus généralement, l'entier n s'envoie sur $a(n)$ où $a(n)$ est l'un des symboles a, b. On dit que la suite $\big(a(n)\big)$ est automatique. Toute suite engendrée par un automate est dite automatique. On montre aisément que les suites ultimement périodiques sont automatiques. Mais elles ne sont pas les seules. La suite engendrée par l'automate de la figure 11 coïncide avec la suite des flèches $S_p(\overrightarrow{M})$, (a est la flèche $\rightarrow$, b est la flèche $\leftarrow$).

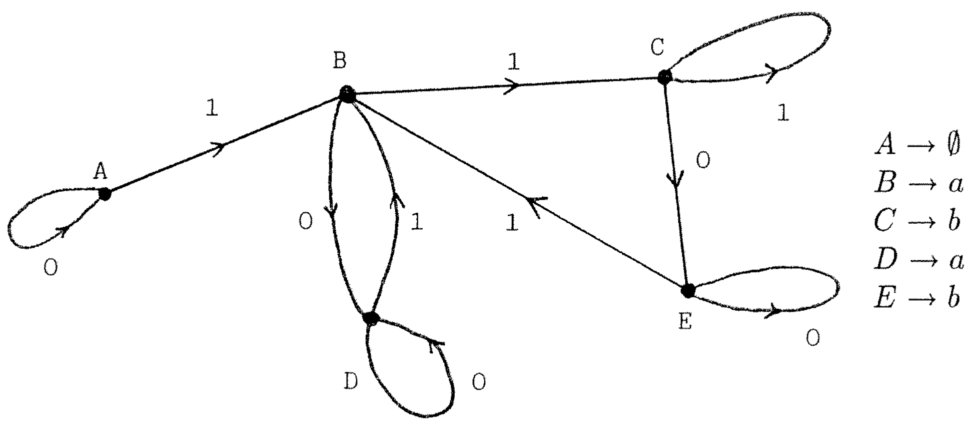


Figure 11

Un automate est donc essentiellement un ordinateur sans mémoire.

La conjoncture à laquelle nous faisions allusion à la fin du paragraphe précédent est la suivante : un nombre réel dont le développement binaire (ou décimal) est automatique est soit un nombre rationnel (développement ultimement périodique), soit un nombre transcendant. Cette conjecture est partiellement démontrée puisqu'elle a été établie pour une grande classe d'automates qui contient en particulier l'automate de la figure 11. Pliez une feuille de papier une infinité de fois et vous aurez un nombre transcendant. Une des conséquence frappante de la conjecture est que les décimales de $\sqrt{2}$ (ou de tout autre nombre réel algébrique irrationnel) ne peuvent s'obtenir par un automate. En d'autres termes, une machine "*simple*" ne pourrait calculer les décimales de $\sqrt{2}$. Ces décimales seraient "*au hasard*".

UNE PREUVE PAR L'ABSURDE

L'histoire ne s'arrête pas là et il y a encore beaucoup de développements possibles ainsi qu'on pourra le lire dans l'article précité Folds. Mais je crains d'abuser de la patience du lecteur; il est temps de conclure.

Nous étions parti du concept statique de symétrie. La perturbation en a enrichi la structure par l'introduction d'une certaine irrégularité certes limitée, et qui s'est révélée extrêmement féconde. Désordre créateur, c'est bien là le thème défendu par le philosophe Umberto ECO dans son Œuvre Ouverte : la simplicité et l'évidence ne valent rien, tout du moins dans le domaine artistique et littéraire. Une œuvre doit nécessairement être mystérieuse, mal définie, peut-être même inachevée, comme en devenir perpétuel. Elle doit être trouble.

Permettez-moi d'apporter, si besoin est, une dernière et ultime preuve à la thèse selon laquelle le désordre est riche. Il s'agit d'une preuve par l'absurde, une preuve *a contrario*. Ecoutez le Professeur KITAÏGOROSKI, physicien soviétique qui conclut son livre "*L'Ordre et le Désordre dans le Monde des Atomes*" par la sentence suivante :

> "*L'auteur s'est même risqué à affirmer que toute déviation de la vérité artistique dans les œuvres littéraires des auteurs médiocres peut être considérée comme une notable déviation de l'ordre.*"

RÉFÉRENCES

[1] DAVIS (Ch.) - KNUTH (D.). — Number representations and dragon curves, *J. Recreational Math.*, t. **3**, 1970, p. 61–81; 133–149.

[2] DEKKING (F.M.) - MENDES FRANCE (M.) - van der POORTEN (A.). — Folds, *Mathematical Intelligencer*, t. **4**, 1982, p. 130–138; 173–180; 190–195.

[3] ECO (U.). — *L'Œuvre Ouverte - Coll. Points.* — Paris, Seuil—1965.

[4] KITAÏGOROSKI (A.). — *L'ordre et le désordre dans le monde des atomes.* Moscou, Mir—1980.

[5] KRANF (P.). — Le Monsieur qui n'a pas d'habitudes, in Humour 1900, présenté par CARRÈRE (J.C.), J'ai Lu 1963, p. 90.