Équations différentielles linéaires du premier et du second ordre

J.-P. Quelen

23 janvier 2018

1 Équations du premier ordre

Une équation du premier ordre est une équation du type (e) : $y' - ay = 0$ où a est une constante réelle et y une fonction dérivable.

De façon évidente la fonction $x \mapsto y(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation.

Pour montrer qu'il n'y en a pas d'autres on peut utiliser la méthode de la variation de la constante qui consiste, puisque e^{ax} est toujours non nul, à chercher la solution de (e) sous la forme générale où k est une fonction dérivable. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned}(e) &\Leftrightarrow k'(x)\mathrm{e}^{ax} + k(x)a\mathrm{e}^{ax} - ak(x)\mathrm{e}^{ax} = 0\\ &\Leftrightarrow k'(x)\mathrm{e}^{ax} = 0\\ &\Leftrightarrow k'(x) = 0.\end{aligned}$$

k est par conséquent une fonction constante,
$x \mapsto y(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ sont donc les seules solutions de (e).

Remarque : si on fixe une condition initiale $y(x_0) = y_0$ alors la solution est unique car elle correspond à $k = \dfrac{y_0}{\mathrm{e}^{ax_0}}$.

2 Équations du second ordre

Il s'agit d'équations de la forme (e') : $y" + ay' + by = 0$.

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ appelée équation caractéristique de (e') possède deux racines réelles ou complexes éventuellement égales r_1 et r_2.

On vérifie aisément que $x \mapsto y(x) = k\mathrm{e}^{r_1 x}$ est solution de (e'). En effet pour tout x,

$$y" + ay' + by = kr_1^2\mathrm{e}^{r_1x} + akr_1\mathrm{e}^{r_1x} + bk\mathrm{e}^{r_1x} = k\left(r_1^2 + ar_1 + b\right)\mathrm{e}^{r_1x} = 0$$

puisque r_1 est racine de $r^2 + ar + b = 0$.

Comme précédemment on cherchera alors la solution générale sous la forme
$x \mapsto y(x) = k(x)\mathrm{e}^{r_1x}$ où k est une fonction dérivable.

Dans ces conditions on a $y'(x) = k'(x)\mathrm{e}^{r_1x} + k(x)\mathrm{e}^{r_1x}$ et

$$y"(x) = k"(x)\mathrm{e}^{r_1x} + 2k'(x)r_1\mathrm{e}^{r_1x} + k(x)r_1^2\mathrm{e}^{r_1x}.$$

(e') s'écrit alors : $k"\mathrm{e}^{r_1x}+2k'r_1\mathrm{e}^{r_1x}+kr_1^2\mathrm{e}^{r_1x}+a\left(k'\mathrm{e}^{r_1x}+kr_1\mathrm{e}^{r_1x}\right)+bk\mathrm{e}^{r_1x}=0$ ou encore $k"+(2r_1+a)\,k'+\left(r_1^2+ar_1+b\right)k=0$ ce qui se réduit finalement à

$$k"+(2r_1+a)\,k'=0.$$

- Si r_1 est racine double de r^2+ar+b alors $2r_1+a=0$ car $r_1+r_2=2r_1=-a$.
  L'équation $k"+(2r_1+a)\,k'=0$ devient dans ces conditions $k"=0$ et par suite $k'(x)=\lambda$ et $k(x)=\lambda x+\mu$ d'où $y(x)=(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{r_1x}$.
- Si r_1 est racine simple (éventuellement complexe) alors l'autre racine r_2 vérifie $r_1+r_2=-a$. Dans ces conditions $k"+(2r_1+a)\,k'=0$ est équivalente à $k"+(r_1-r_2)\,k'=0$.
  Si on pose $z=k'$ on obtient alors l'équation du premier ordre $z'+(r_1-r_2)\,z=0$, équation qui a pour solutions $x\mapsto z(x)=\lambda\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}$.
  k primitive de z s'écrit donc $k(x)=\dfrac{\lambda}{r_2-r_1}\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}+\mu$ et dans ces conditions on a

  $$y(x)=\left(\frac{\lambda}{r_2-r_1}\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}+\mu\right)\mathrm{e}^{r_1x}=\frac{\lambda}{r_2-r_1}\mathrm{e}^{r_2x}+\mu\mathrm{e}^{r_1x}.$$

  ou encore $y(x)=\eta\mathrm{e}^{r_2x}+\mu\mathrm{e}^{r_1x}$ en posant $\eta=\dfrac{\lambda}{r_2-r_1}$.

  Remarque : si r_1 et r_2 sont complexes alors r_1 et r_2 sont conjugués. On peut donc écrire $r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$ et $r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$ avec α et β réels. Dans ces conditions les solutions $y(x)=\eta\mathrm{e}^{r_2x}+\mu\mathrm{e}^{r_1x}$ pourront s'exprimer sous différentes formes équivalentes :

  $$\begin{aligned} y(x) &= \eta\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}+\mu\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}\\ y(x) &= \left(\eta_1\sin(\beta x)+\mu_1\cos(\beta x)\right)\mathrm{e}^{\alpha x}\\ y(x) &= \left(\eta_2\cos(\beta x+\phi)\right)\mathrm{e}^{\alpha x}\end{aligned}$$