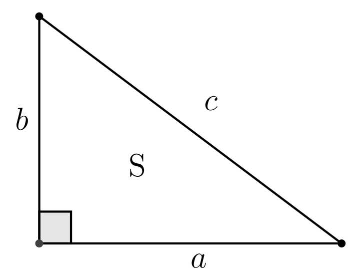
Nombres congruents

13 décembre 2009

1 Définition

Un nombre entier S est congruent si S est l'aire d'un triangle rectangle de côtés rationnels. En d'autres termes S est congruent s'il existe des nombres rationnels a, b, c tels que :



$$S = \frac{1}{2}ab \text{ et } a^2 + b^2 = c^2.$$

Exemples :

$a = 4$, $b = 3$ et $c = 5$ conviennent car $S = \frac{1}{2}4 \times 3 = 6$ et $4^2 + 3^2 = 5^2$.

$a = \frac{20}{3}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{41}{6}$ conviennent aussi car $S = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \times \frac{3}{2} = 5$ est entier et $\left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{41}{6}\right)^2$.

On peut aussi remarquer que si S est un nombre congruent alors pour tout entier k supérieur ou égal à 1, k^2S est aussi un nombre congruent. En effet dans les conditions précédentes $k^2S = \frac{1}{2}(ka)(kb)$ avec $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$. Il y a donc une infinité d'entiers congruents. Si $k = 2$ dans l'exemple $a = 4$, $b = 3$ et $c = 5$, on obtient le triplet $(6, 8, 10)$ et $k^2S = 24$ est par conséquent un nombre congruent.

Á l'inverse si k^2 est un diviseur de S alors $\frac{S}{k^2}$ est un nombre congruent. En effet $\frac{S}{k^2} = \frac{1}{2}\frac{a}{k}\frac{b}{k}$ et $\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \left(\frac{b}{k}\right)^2 = \left(\frac{c}{k}\right)^2$. Le triplet $(40, 9, 41)$ conduit à $S = \frac{1}{2}40 \times 9 = 180$. Comme $180 = 6^2 \times 5$, 5 est aussi un nombre congruent.

2 Les triplets pythagoriciens

Rechercher des nombres congruents se ramene à chercher des triplets pythagoriciens c'est à dire des nombres entiers a, b, c tels $a^2 + b^2 = c^2$. Comme $k^2\frac{1}{2}ab$ est un nombre congruent pour tout entier k non nul, on peut limiter la recherche aux triplets pythagoriciens primitifs c'est à dire aux triplets (a, b, c) tels que a, b, c soient premiers entre eux. Parmi les deux nombres a et b, l'un est obligatoirement pair à cause de la formule $S = \frac{1}{2}ab$, l'autre étant alors impair sans quoi a, b, c auraient le facteur 2 en commun.

Un théorème (dû à Diophante) permet d'obtenir tous les triplets pythagoriciens primitif :

(a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif avec b pair si et seulement si il existe deux entiers p et q premiers entre eux ($p > q$) et de parités différentes tels que :
$a = p^2 - q^2$
$b = 2\ p\ q$
$c = p^2 + q^2$.

Démonstration :

S'il existe deux entiers p et q tels que $a = p^2 - q^2$, $b = 2\ p\ q$ et $c = p^2 + q^2$ il est aisé de vérifier que :

$$a^2 + b^2 = \left(p^2 - q^2\right)^2 + (2\ p\ q)^2 = p^4 + q^4 - 2p^2q^2 + 4p^2q^2 = \left(p^2 + q^2\right)^2 = c^2.$$

Par ailleurs, comme p et q sont de parités différentes p^2 et q^2 sont aussi de parités différentes, il s'en suit que a et b sont impairs. Enfin si a et b avaient un diviseur premier commun autre que 2 alors ce diviseur diviserait $a + b$ et $a - b$ c'est à dire $2p^2$ et $2q^2$ ou encore p et q ce qui est exclu par hypothèse.

Réciproquement si (a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif avec b pair, il existe u entier strictement positif tel que $b = 2u$. On a donc $(c - a)(c + a) = 4u^2$. Comme c et a sont impairs alors $c-a$ et $c+a$ sont pairs et on peut donc écrire : $u^2 = \frac{c-a}{2} \times \frac{c+a}{2}$. Pour tout k diviseur premier de u, k^2 divise u^2 et donc le produit $\frac{c-a}{2} \times \frac{c+a}{2}$. Comme $\frac{c-a}{2}$ et $\frac{c+a}{2}$ sont premiers entre eux, k^2 divise $\frac{c-a}{2}$ ou $\frac{c+a}{2}$. Ainsi il existe deux entiers p et q premiers entre eux tels que $\frac{c+a}{2} = p^2$ et $\frac{c-a}{2} = q^2$ d'où $a = p^2 - q^2$, $b = 2u = 2\ p\ q$ et $c = p^2 + q^2$.