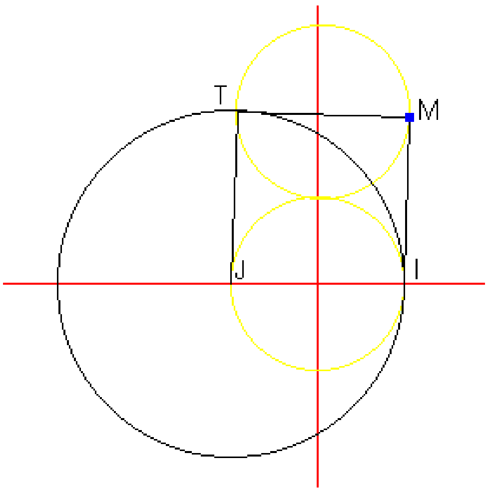
La cardioïde

19 décembre 2017

Le plan P étant muni d'un repère, on démontre que la cardioïde définie précédemment est l'ensemble des points M de coordonnées x et y définis pour tout t appartenant à $\mathbf{R}$ par : $\begin{cases} x(t) = r(2\cos t - \cos 2t) \\ y(t) = r(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ où t est l'angle $(\overrightarrow{\text{OI}}, \overrightarrow{\text{OC}})$ avec O $(0,0)$, I $(1,0)$ et C $(2r\cos t, 2r\sin t)$ centre du cercle mobile.

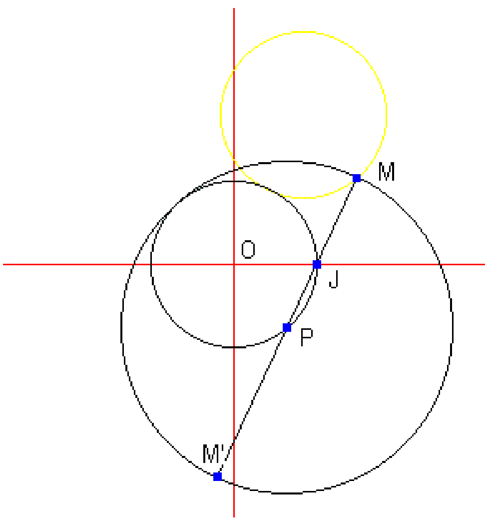
La périodicité des fonctions x et y, la parité de x et l'imparité de y permettent de réduire l'étude des variations de x et y à l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Construction par les tangentes



Soit C le cercle de centre $J(-r ; 0)$ et de rayon $2r$, T un point de ce cercle.
On démontre que le point d'intersection de la parallèle à (JT) passant par $I(r ; 0)$ et de la tangente à C passant par T décrit la cardioïde définie précédemment.

Génération de la courbe par la construction du limaçon de Pascal



Soit P un point différent de J appartenant au cercle C de centre O et de rayon r. On place sur (JP) les points M et M' tels que $PM = PM' = 2r$.
Lorsque P décrit C les points M et M' décrivent un cas particulier du limaçon de Pascal : la cardioïde définie précédemment.
On démontre que cette courbe admet pour équation cartésienne :

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2).$$

D'après [Activités géométriques de la sixième à la terminale - IREM de Strasbourg - 1984] - JPQ 09/11/97