Comment calculer un intervalle

L'intervalle entre deux notes de fréquences f_1 et f_2 s'exprime par le quotient $\dfrac{f_2}{f_1}$.

Par exemple, si $f_1 = 440\text{Hz}$ et $f_2 = 660\text{Hz}$ alors $\dfrac{f_2}{f_1} = 1,5 = \frac{3}{2}$. Il s'agit ici d'une quinte juste. On obtiendrait le même résultat avec $f_1 = 100\text{Hz}$ et $f_2 = 150\text{Hz}$.

Une série d'intervalles semble fonctionner de façon additive alors que les fréquences des sons correspondants sont en fait multipliées. Par exemple une quarte suivie d'une tierce majeure est une sixte majeure. La fréquence de départ est multipliée par $\dfrac{4}{3}$ puis par $\dfrac{5}{4}$ et donc finalement par $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{3}$ qui est le coefficient multiplicatif correspondant à la sixte.

L'idée est alors d'utiliser une fonction logarithme qui transforme les produits en sommes. Ces fonctions vérifient pour a et b strictement positifs l'égalité : $\log(ab) = \log a + \log b$.

L'octave étant l'intervalle qui correspond à un rapport de fréquences égal à 2, comparer un intervalle à l'octave revient à évaluer le rapport $\dfrac{\log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)}{\log 2}$. Ce rapport est supérieur à 1 si l'intervalle est plus grand qu'une octave, inférieur à 1 s'il est plus petit. Ce rapport vaut 0 si $f_2 = f_1$ et il est négatif si $f_2 < f_1$.

On découpe alors l'octave en 12 demi-tons identiques eux-même découpés en 100 parties égales appelées « cents ». L'octave est ainsi munie d'une échelle de $12 \times 100 = 1200$ valeurs et la valeur en cents d'un intervalle sera donc dans ces conditions :

$$i = \frac{\log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)}{\log 2} \times 1200$$

Réciproquement si i est la valeur d'un intervalle exprimé en cents alors le quotient des fréquences vaudra

$$\frac{f_2}{f_1} = 2^{\frac{i}{1200}}$$

Ces formules sont encore valables lorsque $f_2 < f_1$, cela correspond à i négatif.

Dans l'exemple donné au début la valeur i de la quinte vaut :

$$i = \frac{\log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)}{\log 2} \times 1200 = \frac{\log(1,5)}{\log 2} \times 1200 \approx 701,955 \text{ cents}$$

Cela correspond à un peu plus que 7 demi-tons (700 cents), c'est à dire environ 2 cents de plus qu'une quinte selon le tempérament égal.

À la calculatrice, tout logarithme (népérien ou décimal) convient.
On peut aussi utiliser l'application calc-intervalle.html